

## ЛИТЕРАТУРА

1. Азиз Х., Сеттари Э. *Математическое моделирование пластовых систем*. – М.: Недра, 1982. – 408 с.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. *Движение жидкостей и газов в пористых пластах*. – М.: Недра, 1984. – 208 с.

**В. П. Житников, Р. Р. Муксимова, Е. М. Ошмарина**

*Уфимский государственный авиационный технический университет, zhitnik@ugatu.ac.ru, ronika007@mail.ru, elena\_azalka@mail.ru*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРЕЦИЗИОННЫМ ТЕХНОЛОГИЯМ**

### **Введение**

Исследование электрохимического формообразования представляет большой интерес в связи с широким использованием электрохимической размерной обработки (ЭХО) в различных отраслях промышленности. В последнее время активно развиваются технологии прецизионной обработки различных металлов и сплавов, включая нанотехнологии, с помощью импульсной ЭХО вибрирующим электрод-инструментом (ЭИ). Для этого используют различные способы, увеличивающие локализацию растворения и точность копирования.

Моделирование ЭХО основано на законе Фарадея, согласно которому скорость растворения  $V_{есм}$  равна

$$V_{есм} = k\eta \frac{j}{\kappa}, \quad k = \varepsilon/\rho.$$

где  $\varepsilon$  — электрохимический эквивалент;  $\rho$  — плотность растворяемого материала;  $j$  — плотность тока на анодной границе;  $\kappa$  — электропроводность электролита;  $\eta = \eta(j)$  — выход по току (доля тока, участвующего в реакции растворения металла).

### 1. Некоторые замечания о средствах повышения точности копирования

Для анализа локализации электрохимической обработки используются разные показатели. Рассмотрим, например, коэффициент локализации

$$k_{loc} = \frac{V_{есм}^{-1} \left| \frac{dV_{есм}}{ds} \right|}{V_{есм}^{-1} \left| \frac{dV_{есм}}{ds} \right|_{ideal}} = \frac{S}{V_{есм}} \left| \frac{dV_{есм}}{ds} \right|. \quad (1)$$

где  $V_{есм}$  — локальная скорость электрохимического растворения;  $S$  — локальное значение межэлектродного зазора.

При заданных зависимостях  $\eta(j)$  и  $\varphi(j)$  выхода по току и электродных потенциалов от плотности тока  $j$  коэффициент локализации определяется формулой [1]

$$k_{loc} = \left( 1 + \frac{j}{\eta} \frac{d\eta}{dj} \right) \left( 1 + \frac{\kappa}{s} \frac{d\varphi}{dj} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что при  $\eta = \text{const}$ ,  $d\varphi/dj > 0$  значение  $k_{loc} < 1$ , т. е. процесс имеет меньшее значение коэффициента локализации, чем идеальный (т. е. разность скоростей растворения меньше, чем при идеальном процессе, что потребует большего припуска для достижения заданной точности копирования). С другой стороны, при  $d\eta/dj > 0$ ,  $\varphi = \text{const}$  величина  $k_{loc} > 1$ . Тем

самым, реальные зависимости выхода по току и электродных потенциалов имеют противоположное влияние на коэффициент локализации.

На локализацию влияют также нагрев электролита и газовыделение на электродах. На рис. 1 приведены зависимости коэффициента локализации от длины импульса при разных зазорах и напряжениях: *a* —  $U = 10V$ ; *б* —  $U = 20V$  (зазоры  $S$  даны в мкм).

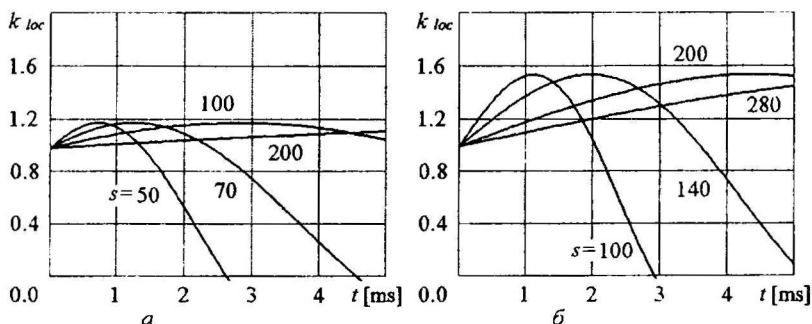


Рис. 1

Результаты численных исследований показывают, что нагрев электролита увеличивает, а выделение газа снижает коэффициент локализации. При этом в начале импульса обычно преобладает влияние нагрева, и величина коэффициента локализации  $k_{loc}$  увеличивается. При увеличении времени импульса начинает преобладать влияние газонаполнения. Тогда величина  $k_{loc}$  начинает уменьшаться и при некоторых условиях может стать меньше единицы.

Для увеличения влияния нагрева электролита на повышение локализации и уменьшения отрицательного влияния газонаполнения можно использовать короткие (до 100 мкс) импульсы сверхвысокой (порядка  $1000 \text{ а/см}^2$ ) плотности тока. При

этом на предпробойной стадии импульса, при достаточно быстром вводе энергии в межэлектродное пространство (МЭП), электролит может некоторое время находиться в существенно перегретом метастабильном состоянии. При этом его электропроводность существенно повышается, обеспечивая увеличение коэффициента локализации. На рис. 2 приведены осциллограммы тока для прямоугольного импульса напряжения (по оси абсцисс — время в мкс): *а* — напряженность  $E = 9000$  В/см, *б* —  $E = 12000$  В/см. Экстремум плотности тока обусловлен действием двух противоположных факторов: интенсивного нагрева (и перегрева в метастабильном состоянии до 200...300 град. С) электролита и резкого повышения его относительного объёмного газонаполнения  $C_g$  за счет выделяющегося газообразного водорода. Экспериментальные данные, приведенные в данной работе получены в НИИ проблем теории и технологии ЭХО УГАТУ (<http://www.pecm.ru>).

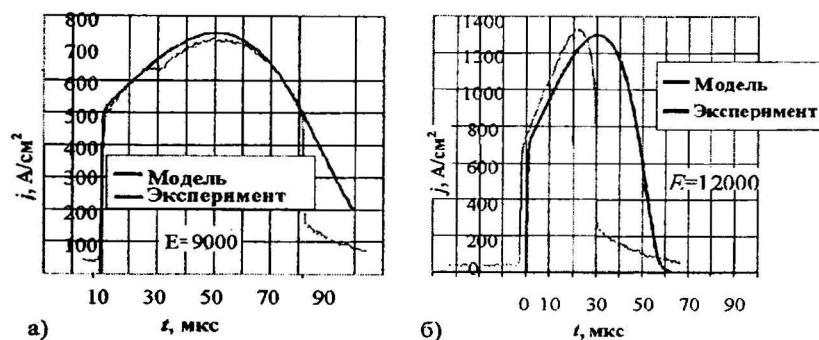


Рис. 2

При соизмеримости длительности импульсов с характерными временами заряда емкостей двойных электрических слоев поверхностей электродов и периода активации возникают физико-химические эффекты, имеющие важные предпосылки для повышения точности копирования. На рис. 3 показаны за-



зависимости анодных потенциалов от плотности тока при различных длинах импульса  $t$ : 1 — 1 мкс; 2 — 5 мкс; 3 — 10 мкс; 4 — 50 мкс.

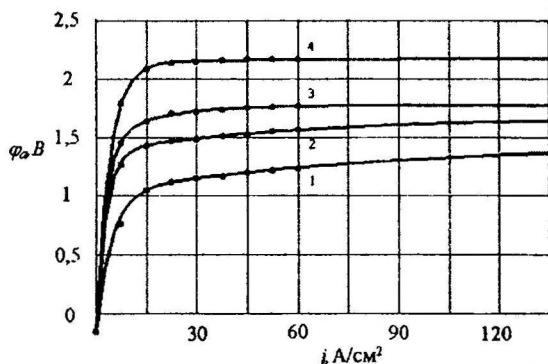


Рис. 3

Выход по току определяется при этом следующим образом:

$$\eta(j, \varphi_a) = \begin{cases} 0, & \varphi_a < \varphi_{cr}, \\ \eta(j), & \varphi_a \geq \varphi_{cr}. \end{cases} \quad (3)$$

При этом растворение начинается при достижении некоторого порогового значения  $\varphi_{cr}$  потенциала; время, необходимое для этого зависит от локальной плотности тока, то есть при малых плотностях тока растворение начинается позже, что приводит к увеличению локализации процесса.

Для реализации такого процесса обработки импульсы подаются группой (по 5 — 50) импульсов в момент наибольшего сближения ЭИ с заготовкой. Зависимость анодного потенциала  $\varphi_a$  от времени имеет вид, проиллюстрированный на рис. 4. Для уменьшения времени спада поляризации могут быть использованы импульсы обратной полярности.

При исследовании процесса электрохимического формообразования рассматривалась схема копирования полусфериче-

ской поверхности ЭИ на плоскую поверхность заготовки. Данная схема охватывает наиболее сложные аспекты операций электрохимического копирования и допускает получение удобного для анализа аналитического решения. В качестве параметра, характеризующего точность копирования, использовалось отношение величины  $h/d$  ( $h$  — глубина лунки,  $d$  — ширина лунки) для исследуемого процесса к  $h_i/d_i$  для идеального сегмента сферы. Из рис. 5 видно, что существуют оптимальные параметры импульсов, которым соответствует максимальная локализация процесса растворения.

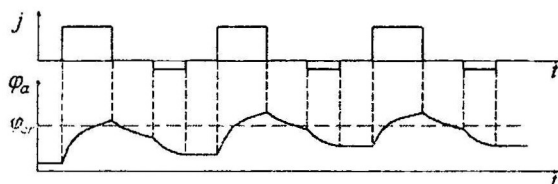


Рис. 4

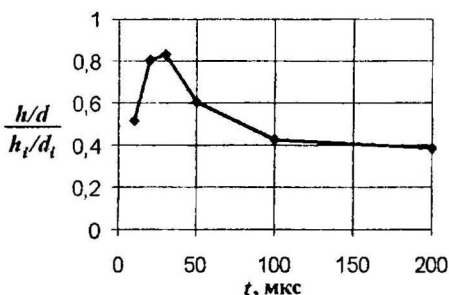


Рис. 5

Количество электричества  $Q$  в каждом эксперименте при копировании сферической поверхности было одинаковым. Для уменьшения влияния выхода по току применялся активирующий электролит (5 % раствор NaCl). На рис. 6 представлены

профили и внешний вид (увеличенный в 25 раз) поверхностей, обработанных полусферическим ЭИ.

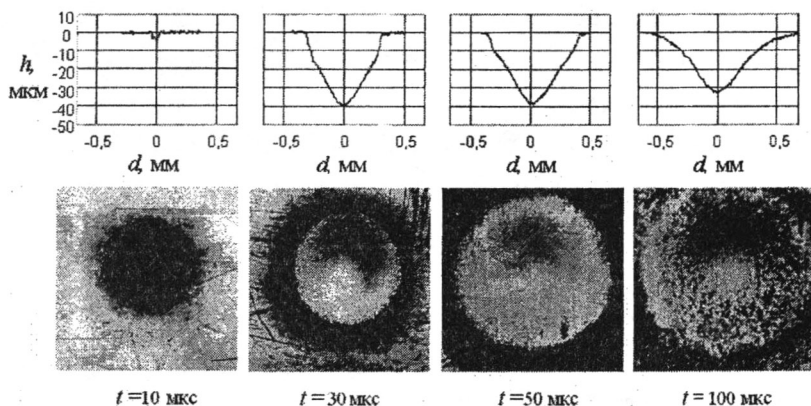


Рис. 6

В качестве другой иллюстрации прецизионной технологии растворения рассмотрим процесс обработки плоской поверхности плоским ЭИ с изолированным участком (рис. 7, *а* — схема МЭП; *б* — результаты эксперимента). О высокой локализации свидетельствуют резкие границы растворенной и нерастворенной зон. При обычной технологии обработки эти границы имеют весьма размытый характер.

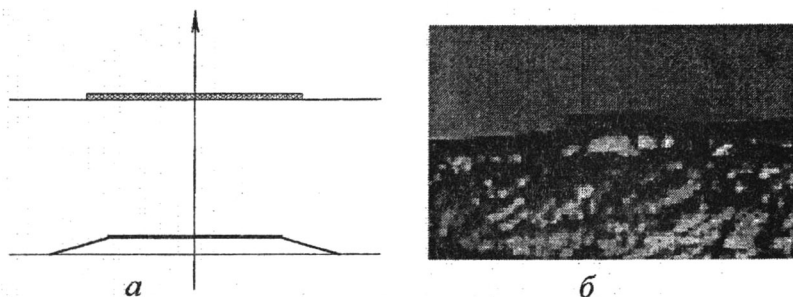


Рис. 7

## 2. Выход по току

Зависимость величины выхода по току (доли тока, участвующего в реакции растворения металла) от плотности тока  $\eta(j)$  используется при моделировании ЭХО для учета различных факторов, влияющих на растворение, и, как следует из (2), непосредственно определяет коэффициент локализации процесса. При этом чем круче эта зависимость в рабочей зоне, тем выше коэффициент локализации. В настоящее время авторам не известен способ теоретического определения  $\eta(j)$ , в связи с этим наиболее доступным представляется эмпирический способ определения искомых зависимостей (рис. 8, *а* — данные [6]; *б* — данные [7]). Ранее при решении задач ЭХО эта зависимость аппроксимировалась гиперболой [3 – 5] либо дробно-квадратичной функцией [3]. В [1] эта зависимость аппроксимировалась дробно-линейной функцией.

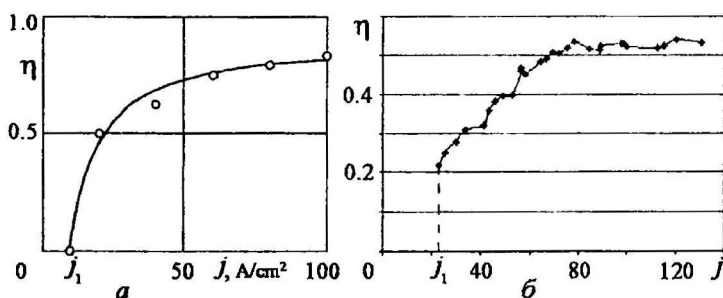


Рис. 8

При длительности импульса порядка нескольких микросекунд, как было указано выше, в начале импульса происходит установление потенциала, и растворения материала заготовки при этом не происходит. При таком способе обработки, как показывает эксперимент, зоны интенсивного и слабого растворения имеют более резкие границы (рис. 7). В связи с этим в дан-

ной работе зависимость выхода по току от напряженности моделируется скачкообразной функцией

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ 0, & j < j_1. \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что такая модель не противоречит и известным результатам (рис. 8), поскольку реальная зависимость для пассивирующих электролитов содержит участок резкого изменения выхода по току при приближении плотности тока к некоторому критическому значению.

Следует также отметить, что эксперимент (рис 8, а) дает возможность по-разному трактовать зависимость между двумя экспериментальными точками с наименьшими  $j$ . Более того, при проведении эксперимента [7] не удалось получить стационарного режима при значениях  $j$ , меньших некоторого значения  $j_1$ , что может означать существование вертикального участка зависимости (рис. 8, б).

### 3. Модели прецизионной ЭХО

Наряду с известными моделями ЭХО: стационарная, предельная, автомодельная и нестационарная общего вида, рассмотренными в [1 – 5], модель (4) позволяет сформулировать задачи нового типа — квазистационарную и предельно-стационарную.

Рассмотрим в качестве примера стационарную задачу формообразования обрабатываемой поверхности при резке проводочным ЭИ, движущимся вертикально вниз с постоянной скоростью  $V_{et}$ . Сечение межэлектродного пространства (МЭП) показано на рис. 9, а. В сечении ЭИ представляется точечным источником  $C$ .



Зависимость выхода по току от напряженности моделируется скачкообразной функцией (4). При этом на обрабатываемой поверхности образуются три зоны с тремя типами краевых условий. Первая зона  $EDF$ , в которой напряженность за счет близости к ЭИ превышает  $E_1$ , характеризуется условием стационарности [2]  $V_{ecm} = V_{et} \cos \gamma$ , где  $\gamma$  — угол между направлением движения ЭИ и нормалью к анодной поверхности. На плоскости годографа напряженности  $\bar{E} = dW/dZ$  этому участку соответствует дуга окружности радиуса  $E_0/2$  с центром в точке  $iE_0/2$  (рис. 9, в), где  $E_0$  — напряженность в точке  $D$ . Величина  $E_0$  определяется из условия равенства скорости растворения скорости движения ЭИ в точке  $D$ :  $E_0 = V_{et}/(k\eta_0)$ .

В силу симметрии МЭП на рис. 9, в и далее рассматривается правая его половина.

Переходному участку  $FG$  с постоянным модулем напряженности на плоскости  $\bar{E} = Ee^{-i\theta}$  (где  $\theta$  — угол наклона вектора напряженности к оси  $X$ ) соответствует дуга окружности радиуса  $E_1 \leq E_0$  с центром в начале координат. Поскольку обрабатываемая поверхность эквипотенциальна, вектор напряженности нормален к поверхности в каждой ее точке. Поэтому участку, где отсутствует растворение, соответствует отрезок действительной оси  $GA$ . На участках границы  $AC$  и  $CD$ , соответствующих средней линии, вектор напряженности наклонен под углом, соответственно,  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = -\pi/2$  к оси  $X$ . В точке расположения источника  $C$  напряженность бесконечна. Поэтому в плоскости годографа этим участкам соответствуют вертикальные лучи. Разрезы от точки  $G$  отсутствуют, поскольку на стационарной поверхности  $\theta \leq 0$  и  $\eta \leq \eta_0$ .

Введем параметрические плоскости  $t = E_0/\bar{E}$  и  $\zeta$ , области изменения которых показаны на рис. 10, а, б. Функция  $t(\zeta)$  представляется в виде суммы известных функций с заданными особенностями, учитывающими свойства решения, и ряда Лорана:

$$t = -\frac{1}{\pi} \ln \zeta + D_1 \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\zeta^m - \zeta^{-m}). \quad (5)$$

Пусть  $\zeta = e^{i\sigma}$ . Тогда

$$t = -\frac{i}{\pi} \sigma - iD_1 \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2} + 2i \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(m\sigma). \quad (6)$$

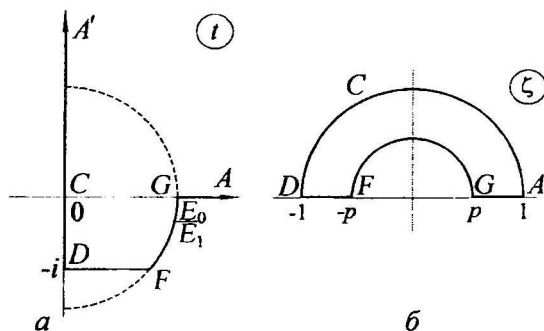


Рис. 10

В соответствии с рис. 10, а, б имеем  $t - \alpha \sim (\zeta - p)^3$ ,  $\alpha = E_0/E_1$ .

Тогда

$$\frac{dt}{d\zeta}(p) = -\frac{1}{\pi p} - D_1 \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} m c_m (p^m + p^{-m}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\zeta^2}(p) &= \frac{1}{\pi p^2} + D_1 \frac{4}{(p-1)^3} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} m c_m ((m-1)p^{m-2} - (m+1)/p^{m+2}) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда можно выразить  $c_1$  и  $D_1$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{p}{2(p^2 - p + 1)} \left[ \frac{1}{\pi} - \sum_{m=2}^{\infty} m c_m (p^m + p^{-m}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p-1}{p+1} \sum_{m=2}^{\infty} m^2 c_m (p^m - p^{-m}) \right], \\ D_1 &= -\frac{(p-1)^2}{2p} \left[ \frac{1}{\pi} - \sum_{m=1}^{\infty} m c_m (p^m + p^{-m}) \right]. \end{aligned}$$

Комплексный потенциал  $W(\zeta)$  представляет собой функцию, имеющую чисто мнимые значения на  $DF$ ,  $FG$  и  $GA$ , постоянную мнимую часть, равную нулю на  $DC'$  и  $I/(2\kappa)$  на  $AC$



(где  $I$  — ток, текущий в цепи,  $\kappa$  — электропроводность электролита). Представим  $W(\zeta)$  в виде

$$W(\zeta) = \frac{I}{2\pi\kappa} \ln \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{\zeta - e^{-i\sigma_0}} + i \sum_{m=1}^{\infty} d_m (\zeta^m - \zeta^{-m}) + iD_2, \quad (7)$$

где  $\zeta = e^{i\sigma_0}$  — образ точки  $C$ . Величина  $\sigma_0$  определяется из решения уравнения, которое получается приравниванием выражения (6) нулю.

Разложив логарифм в (7) в степенной ряд при  $\zeta = pe^{i\sigma}$  и приравняв действительную часть  $W(\zeta)$  нулю, найдем  $d_m$ . Тогда

$$W(\zeta) = \frac{I}{2\pi\kappa} \ln \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{\zeta - e^{-i\sigma_0}} - i \frac{I}{\pi\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\sigma_0)}{m} \times \\ \times \frac{p^m}{p^m + p^{-m}} (\zeta^m - \zeta^{-m}) + i \frac{I}{2\kappa} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\pi}\right);$$

$$\frac{dW}{d\zeta} = i \frac{I}{\pi\kappa} \left[ \frac{\sin \sigma_0}{\zeta^2 - 2\zeta \cos \sigma_0 + 1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\zeta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\sigma_0 \frac{p^m}{p^m + p^{-m}} (\zeta^m + \zeta^{-m}) \right].$$

Поскольку  $\bar{E} = dW/dZ = E_0/t$ , то с учетом (5) дифференциал

$$dZ = \frac{t}{E_0} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (8)$$

Задача сводится к определению коэффициентов ряда Лорана (5) методом коллокаций по условию  $|t(pe^{i\sigma})| = \alpha$  при  $0 \leq \sigma \leq \pi$  и численному интегрированию функции (8) для расчета формы обрабатываемой поверхности.

Численные результаты приведены на рис. 11:  $a$  — формы обрабатываемой поверхности;  $b$  — зависимости торцевого ( $S_m$ ) и бокового ( $S_g$ ) зазоров от отношения  $1/\alpha = E_1/E_0$ .

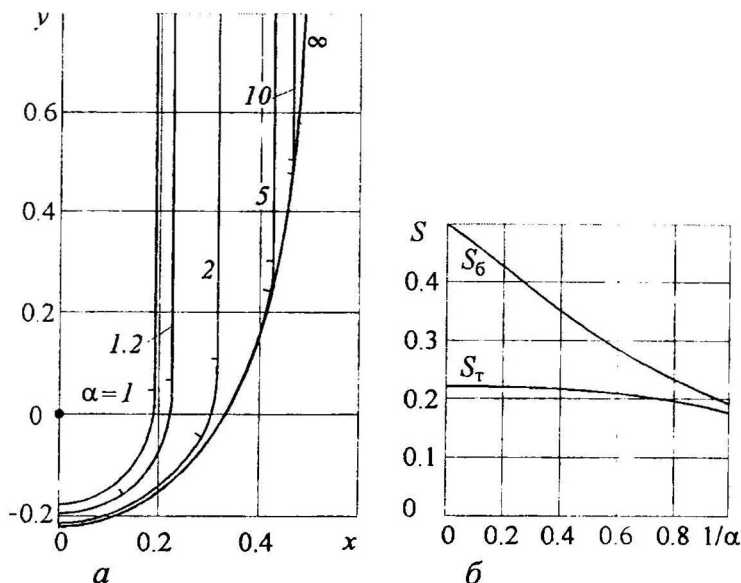


Рис. 11

Отметим, что величина  $I(\kappa E_0)^{-1} = kI/(\kappa V_{el})$  в (8) играет роль ширины разреза. При расчетах она принималась равной единице. Из рис. 11 видно, что при  $\alpha \rightarrow \infty$  зона активного растворения увеличивается, и решение приближается к известному стационарному решению [2]

$$Z = -i \frac{I}{\kappa \pi E_0} \ln \left( \exp \left( \frac{2\kappa \pi}{I} W \right) + 1 \right).$$

При  $\alpha \rightarrow 1$  ( $F \rightarrow D$ ) зона активного растворения исчезает, а увеличивается зона постоянной напряженности, в пределе возникает режим, характерный для электроэрозионной обработки, называемый далее предельно-стационарным.

Рассмотрим этот режим более подробно, поскольку в этом случае реализуется “наиболее крутая” зависимость выхода по току в рабочей зоне.

Рассмотрим стационарную задачу о предельной ЭХО точечным ЭИ  $C$ , который движется вертикально вниз со скоростью  $V_{et}$  (рис. 9, а). На обрабатываемой поверхности образуются две зоны: растворения  $HDG$  (в которой  $|\bar{E}| = E_1$ ) и отсутствия растворения  $GA$ . В силу симметрии рассматривается правая половина области.

Областью, соответствующей МЭП на плоскости комплексного потенциала, является полуполоса (рис. 9, б).

Согласно условию предельного формообразования ( $|\bar{E}| = E_1$ ) на плоскости годографа напряженности все точки части поверхности  $DG$  лежат на окружности радиуса  $E_1$  с центром в начале координат (рис. 12, а), где  $E_1$  — предельная напряженность, при которой происходит растворение.

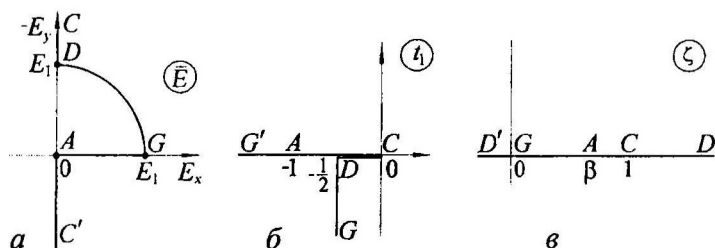


Рис. 12

На участках границы  $AC$  и  $CD$ , соответствующих средней линии МЭП, вектор напряженности наклонен под углом к оси  $X$   $\theta = \pi/2$  и  $\theta = -\pi/2$  соответственно. В точке расположения источника  $C$  напряженность бесконечна. Поэтому на плоскости годографа этим участкам соответствуют вертикальные лучи.

Применив преобразование  $t_1 = E_1^2/(\bar{E}^2 - E_1^2)$ , получим треугольник с углами  $C, D, G$ , равными  $2\pi, \pi/2, -3\pi/2$  соответственно (рис. 12, б).

Используя преобразование Шварца – Кристоффеля, получим функцию, конформно отображающую верхнюю полуплоскость  $\zeta$  (рис. 12, в) на многоугольник:

$$t_1 = -\frac{3}{4} \left( \frac{1}{3\zeta\sqrt{\zeta}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta}} + \frac{2}{3} \right).$$

Из соответствия образов точки  $A$  на плоскостях  $t_1$  и  $\zeta$  имеем  $\beta = 1/4$ .

Используя интеграл Шварца – Кристоффеля, найдем комплексный потенциал и его производную:

$$W = \frac{I}{2\kappa\pi} \ln \frac{\sqrt{\zeta - 1/4} - \sqrt{3}/2}{\sqrt{\zeta - 1/4} + \sqrt{3}/2},$$

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{I}{2\kappa\pi} \frac{1}{\sqrt{\zeta - 1/4}(\zeta - 1)}.$$

Так как

$$\bar{E}^2 = E_1^2 \frac{t_1 + 1}{t_1}, \quad \frac{dW}{dZ} = E_1 \sqrt{\frac{t_1 + 1}{t_1}},$$

то

$$\frac{dZ}{dW} = -\frac{i}{E_1} \frac{(\sqrt{\zeta} - 1)(2\sqrt{\zeta} + 1)^{1/2}}{(\sqrt{\zeta} + 1)(2\sqrt{\zeta} - 1)^{1/2}}.$$

Тогда

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{I}{2\kappa\pi E_1} \frac{1}{(\sqrt{\zeta} + 1)^2 (2\sqrt{\zeta} - 1)}.$$

Отсюда

$$Z = -i \frac{I}{\kappa\pi E_1} \frac{1}{6\sqrt{3}} \left[ -\frac{3}{\sqrt{\zeta} + 1} + \ln \frac{2\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} + \frac{3}{2} + \ln 2 \right].$$

#### 4. Квазистационарная модель ЭХО

Рассмотрим задачу формообразования обрабатываемой поверхности при обработке плоским полубесконечным вертикальным ЭИ  $A'SB'$ , движущимся вертикально вниз с постоянной

скоростью  $V_{et}$ . Сечение межэлектродного пространства (МЭП) показано на рис. 13, а. Образом МЭП на плоскости комплексного потенциала является полюса ширины  $U$  (рис. 13, б), где  $U$  — разность потенциалов на аноде и катоде с учетом электродных потенциалов.

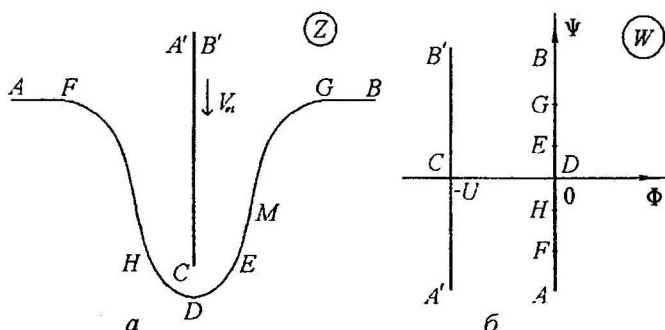


Рис. 13

Зависимость выхода по току от напряженности моделируется скачкообразной функцией (4).

Как отмечалось выше, на обрабатываемой поверхности образуются три зоны с тремя типами краевых условий. На горизонтальных участках  $AF$  и  $GB$ , где  $|E| < E_1$ , растворение отсутствует. Зона  $HDE$ , в которой напряженность за счет близости к ЭИ превышает  $E_1$ , характеризуется условием стационарности. На плоскости годографа напряженности  $\bar{E} = dW/dZ$ , как и в предыдущей задаче, этому участку соответствует дуга окружности радиуса  $E_0/2$  с центром в точке  $iE_0/2$  (рис. 14, а). Переходному участку  $EMG$  ( $M$  — точка перегиба границы) соответствует дуга окружности радиуса  $E_1 \leq E_0$  с центром в начале координат. Дуга  $EG$  на плоскости  $\bar{E}$  может содержать разрез, поскольку в отличие от предыдущей задачи (рис. 9, в), данная граница не является стационарной.

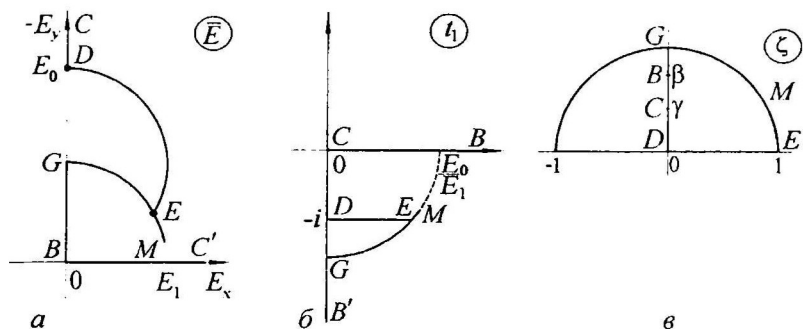


Рис. 14

В данной постановке задачи течение времени моделируется сдвигом кромки электрод-инструмента  $C$  в направлении обрабатываемой поверхности.

Введем параметрические плоскости  $t_1 = E_0/\bar{E}$  и  $\zeta$ , области изменения которых показаны на рис. 14, б, в. Конформное отображение  $t_1(\zeta)$  проще искать с помощью численного интегрирования производной

$$\frac{dt_1}{d\zeta} = \frac{1}{(\zeta^2 + \gamma^2)^{1/2} (\zeta^2 + \beta^2)^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \zeta^{2m}, \quad (9)$$

поскольку на участках  $DE$ ,  $DC$  и  $BG$  границы производная имеет чисто действительные значения, на участке  $BC$  — чисто мнимые.

Для получения отображения  $W(\zeta)$  используем верхнюю полуплоскость  $t_2 = -(\zeta^2 + 1/\zeta^2)/2$  (рис. 15).

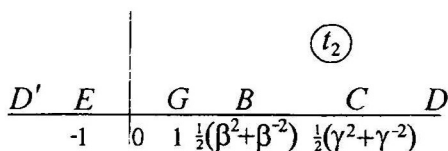


Рис. 15

Функция  $W(t_2)$  получается с помощью преобразования Шварца – Кристоффеля:

$$W(t_2) = -i \frac{U}{\pi} \ln \frac{\sqrt{t_2 - \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})} - \sqrt{\frac{1}{2}(\beta^2 + \beta^{-2}) - \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})}}{\sqrt{t_2 - \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\beta^2 + \beta^{-2}) - \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^{-2})}}.$$

Функция  $Z(\zeta)$  получается численным интегрированием:

$$\begin{aligned} Z(\zeta) &= \frac{1}{E_0} \int_{i\gamma}^{\zeta} t_1(\zeta) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{E_0} W(\zeta) \int_{i\gamma}^{\zeta} \frac{dt_1}{d\zeta} d\zeta - \frac{1}{E_0} \int_{i\gamma}^{\zeta} W(\zeta) \frac{dt_1}{d\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Задача решается методом коллокаций, т.е. в сумме (9) сохраняется  $M$  слагаемых, а коэффициенты  $c_m$  определяются по условию  $|t_1(pe^{i\sigma})| = \alpha = E_0/E_1$ , заданному в дискретном множестве узловых точек  $\sigma_m = m\pi/(2N)$ . При этом функция  $t_1(\zeta)$  вычисляется с помощью численного интегрирования (9) с условиями  $t_1(i\gamma) = 0$ ,  $t_1(0) = -i$ ,  $\text{Re } t_1(i) = 0$ .

Численные результаты приведены на рис. 16, а в сравнении с предельно-стационарным решением (кривая 1), полученным методом, изложенным выше. Формы изображены в системе координат, связанной с движущимся ЭИ. Это позволяет более наглядно наблюдать установление предельно-стационарной формы в окрестности кромки ЭИ.

На рис. 16, б это же решение сравнивается с предельным решением, возникающим вблизи нерастворяемой части поверхности ( $GB$ ) в неподвижной системе координат. Этим предельным решением является известная задача об истечении жидкости из-под щита (кривая 2).

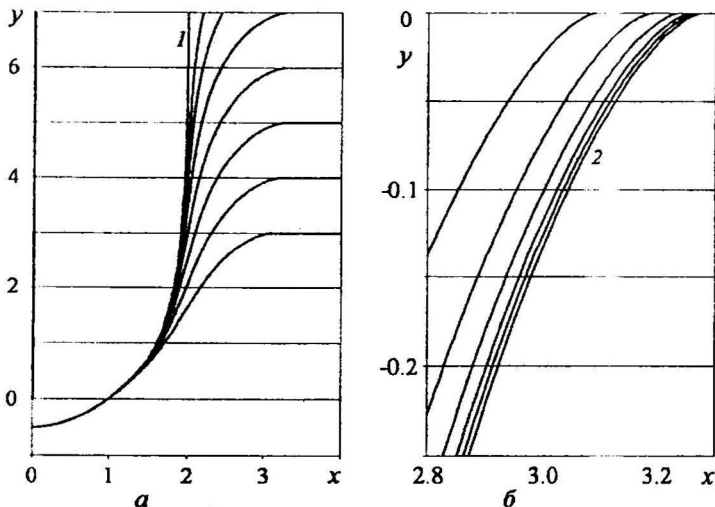


Рис. 16

## 5. Сравнение с нестационарным решением

Нестационарная задача решалась методом, изложенным в [1]. При этом на каждом временном шаге определялись конформное отображение полосы  $\chi$  (параметрического переменного) на физическую плоскость  $z = Z/l$ , а также частная производная  $\frac{\partial z}{\partial \tau}(\chi, \tau)$  безразмерных координат точек области по безразмерному времени  $\tau = tV_{et}/l$  для определения сдвига границы. В качестве характерного размера принималась величина  $l = k\eta U/V_{et}$ . При данном способе обезразмеривания безразмерная скорость ЭИ равна 1.

Частная производная определялась при решении уравнения

$$\operatorname{Im} \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial \sigma} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) = -\eta \left( \left| \frac{dw}{dz} \right| \right) \operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial \sigma}, \quad (10)$$

где  $\sigma = \operatorname{Re} \chi$ ,  $w = W/U$ .

Использование скачкообразной функции выхода по току приводило к включению или выключению растворения при пе-



реходе значения модуля напряженности критического значения  $E_1$ , что было реализовано путем умножения правой части (10) на 1 или 0.

На рис. 17, а приведены формы нестационарной поверхности в неподвижной системе координат. Шаг по безразмерному времени  $\Delta\tau$  равен 1. На рис. 17, б приведены образы этих кривых на плоскости годографа напряженности ( $\Delta\tau = 0.5$ ). Видно формирование квазистационарного режима.

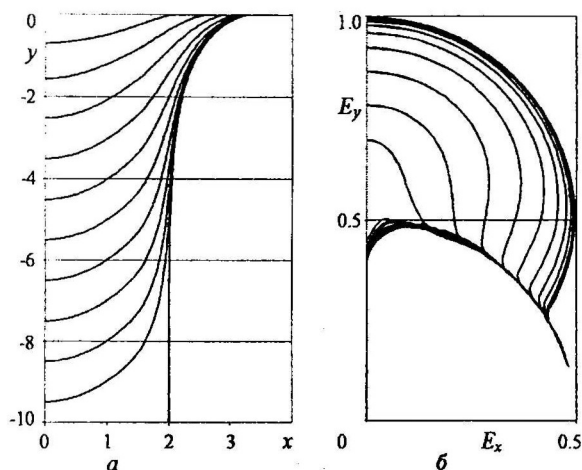


Рис. 17

## 6. Об оценке погрешности

Было установлено, что погрешность формы при решении нестационарной задачи наиболее велика вблизи зоны отсутствия растворения. На рис. 18 приведены формы поверхности в окрестности точки  $G$  в сравнении с решением задачи об истечении жидкости из-под щита (кривая 1). Видно, что при числе узлов сетки  $N=144$  (рис. 18, а) абсолютная погрешность превышает 0.1, а при  $N=729$  (рис. 18, б) уменьшается примерно до 0.02 (относительная погрешность на порядок меньше).

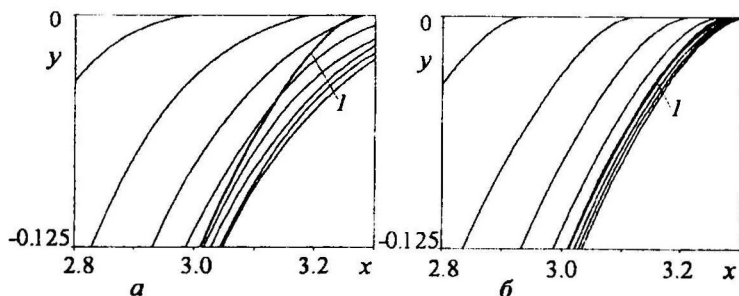


Рис. 18

При решении дифференциального уравнения (10) с разрывной правой частью возникают вопросы о порядке точности метода. Для оценки погрешности применялась фильтрация, описанная в [9]. На рис. 19 приведены результаты исследования погрешности производной  $dw/dz$  в зоне разрыва правой части уравнения. По оси ординат отложены десятичные логарифмы относительной погрешности (с отрицательным знаком), по значениям которых можно оценить число верных значащих цифр результата, а также оценить скорость убывания погрешности. По оси абсцисс отложены десятичные логарифмы отношения шага по безразмерному времени  $\Delta\tau$  (в отношении к  $\Delta\tau_0 = 0.01$ ). Цифрой 0 обозначена погрешность результатов, полученных прямым расчетом, цифрой 1 — отфильтрованные результаты. Видно, что после первой фильтрации погрешность (порядка  $10^{-4} - 10^{-5}$ ) имеет нерегулярный характер, что вызвано разрывом правой части уравнения (10).

Таким образом, результаты численного исследования показывают, что зависимость погрешности от  $\Delta\tau$  можно представить суммой  $\delta = c\Delta\tau + \delta_1(\Delta\tau)$ , где  $c$  — константа;  $\delta_1(\Delta\tau)$  — нерегулярная часть погрешности.

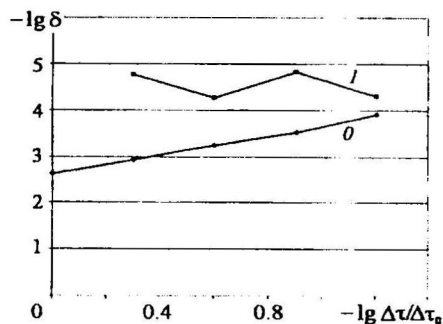


Рис. 19

## Заключение

Предложенная модель ЭХО со скачкообразной функцией выхода по току дала возможность исследования формообразования при предельно высокой локализации процесса растворения согласно принятой модели. Для этого были сформулированы и решены задачи предельно-стационарной и квазистационарной ЭХО.

Полученные численные результаты позволяют сравнить решения нескольких задач, что упрощает оценку погрешности и увеличивает достоверность численных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ-65497.2010.9).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Житников В.П., Зайцев А.Н. *Импульсная электрохимическая размерная обработка*. – М.: Машиностроение, 2008. – 413 с.
2. Клоков В.В. *Электрохимическое формообразование*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – 80 с.

3. Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И. *Методы расчета электрохимического формообразования*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 388 с.

4. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. *Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ*. – М.: Academia, 2005. – 200 с.

5. Миназетдинов Н.М. *Об одной задаче размерной электрохимической обработки* // ПМТФ. – 2009. – Т. 50. – № 3. – С. 214-220.

6. Седыкин Ф.В., Орлов Б.П., Матасов В.Ф. *Исследование анодного тока при электрохимической обработке при постоянном и импульсном напряжении* // Технология машиностроения. – Тула, 1975. – Т. 39. – С. 3-10.

7. Маннапов А.Р., Зайцев А.Н. *Технологические показатели электрохимического формирования вставок щёточных уплотнений* // Вестник УГАТУ. – 2008. – № 11. – С. 23-28.

8. Житников В.П., Ошмарина Е.М., Федорова Г.И. *Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании* // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 10. – С. 77-81.

9. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. *Моделирование течений вязкой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа*. – Уфа: Гилем, 2009. – 336 с.